УДК 539.3

Л.О.ПАРХОМЕНКО, ХДУХТ, Харків

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРІВ

Розглянуто задачу теорії пружності про дослідження власних радіальних коливань пружного циліндра скінченної довжини. Розв'язання задачі пропонується здійснювати сумісним застосуванням методу R-функцій і варіаційного, при цьому вихідна задача зводиться до алгебраїчної задачі на власні значення. Використання методу R-функцій дозволяє розглядати циліндри складної геометричної форми. Наведено чисельні результати розрахунку власних значень і власних форм в задачі про коливання кругового пружного циліндра скінченної довжини.

The elasticity theory problem of the investigation of free radial vibrations for an elastic cylinder of finite length is considered. Combined using R-function method and variational method for solving problem is proposed, at that the original problem is reduced to the algebraic eigenvalue problem. The application of R-function method is permit to consider arbitrary geometric form cylinders. The results of numeric eigenvalue and eigenform calculation of vibration problem for the circular elastic cylinder of finite length are presented.

1 Вступ. Циліндр скінченної довжини широко використовується в машинобудуванні, а також часто зустрічається в конструкціях двигунів та енергетичному устаткуванні. Збільшення навантаження на такі деталі зумовлює необхідність дослідження їх власних коливань.

Математичною моделлю коливальних процесів у пружному тілі є рівняння руху [1], а врахування усталеності коливань дозволяє вихідну задачу зводити до алгебраїчної проблеми власних чисел.

Задача про розрахунок частот власних радіальних коливань пружного циліндра класичної форми, поверхня якого є вільною від напружень, розглянута в [2,3]. Певні складнощі виникають при розрахунку коливань тіл, геометрія яких відрізняється від класичної. Такі дослідження потребують використання наближених методів обчислення та створення універсальних алгоритмів їх реалізації. Зокрема, слід відмітити метод скінченних елементів (МСЕ), який має широке практичне застосування у випадку дослідження власних коливань тіл зі складною геометрією. Застосування МСЕ до розрахунку коливань пружних тіл розглянуто в [4] та багатьох інших роботах.

В представленій роботі пропонується наближений метод розрахунку усталених коливань циліндрів скінченної довжини складної геометричної форми з використанням методу R-функцій сумісно з варіаційним методом Рітца [2,3]. Такий підхід дозволяє розглядати циліндри довільної бічної форми та будувати структури розв'язку, в яких враховується геометрична інформація. Велику кількість прикладів застосування методу R-функцій до розрахунку власних коливань пластин представлено в [5].

Аналіз збіжності розв'язку, отриманого за методом, що пропонується, робиться шляхом порівняння результатів розрахунку, проведеного за різним числом координатних функцій, із результатами обчислень за допомогою інших наближених методів.

2 Постановка задачі. Розглядається пружне тіло обертання скінченної довжини Ω з межею $\partial\Omega$, розташоване в циліндричній системі координат Orz (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Досліджується випадок відсутності дії на тіло масових та поверхневих сил. Рух пружного тіла визначається векторним рівнянням Ламе [1,6]

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де $U(t,r,z)$ – вектор зміщень; λ, μ – сталі Ламе; ρ – густина матеріалу.

Припускаємо періодичність коливальних процесів у часі і вважаємо, що

$$U(t,r,z) = e^{-i\gamma t} \cdot u(r,z); \quad u(r,z) = \begin{pmatrix} u_r(r,z) \\ u_z(r,z) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де γ – кругова частота процесу.

Позначимо через β відношення швидкості розповсюдження поперечних хвиль c_2 до швидкості розповсюдження повздовжніх хвиль c_1 в нескінченному пружному середовищі, тобто $\beta = c_2/c_1$, при цьому $c_1^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $c_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$ [1].

Візьмемо за масштаб довжини деяку характерну величину R, за масштаб часу – величину R/c_2. Компоненти вектора зміщень і тензора напружень вважаємо співвіднесеними відповідно до $R\sigma_0/\mu$ і σ_0 (σ_0 – деяка стала, яка має розмірність напруження). Ураховуючи співвідношення (2), рівняння (1) в безрозмірних величинах набуває вигляду

$$\frac{1}{\beta^2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u = -\gamma^2 u; \tag{3}$$

компоненти тензора напружень визначаються формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + (1 - 2\beta^2)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right];$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{u_r}{r} + (1 - 2\beta^2)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right];$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + (1-2\beta^2)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right)\right];$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\ ; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0\ .$$

Вважаємо, що на межі тіла $\partial\Omega$ із зовнішньою нормаллю ν задані нульові нормальне σ_ν та дотичне τ_ν напруження:

$$\sigma_\nu = 0\ ; \quad \tau_\nu = 0\ ; \quad (r,z) \in \partial\Omega\ . \tag{4}$$

Рівняння (3) можна переписати в операторному вигляді як

$$Au = \gamma^2 u\ , \tag{5}$$

де

$$Au = -\left(\frac{1}{\beta^2}\operatorname{grad}\operatorname{div} u - \operatorname{rot}\operatorname{rot} u\right). \tag{6}$$

Таким чином, дослідження коливань тіла, що розглядається, зводиться до задачі на власні значення (5), при цьому крайові умови (4) вважаються природними.

3 Формулювання варіаційної задачі. Для розв'язання отриманої задачі застосуємо варіаційний метод. Знаходження мінімального власного значення оператора A, визначеного рівністю (6), еквівалентно задачі про знаходження мінімуму функціонала енергії [2]

$$E(u) = \int_\Omega \left\{\frac{1-2\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right\} d\Omega \tag{7}$$

за умови

$$\int_\Omega \left(u_r^{\ 2} + u_z^{\ 2}\right) d\Omega = 1\ . \tag{8}$$

При цьому вектор зміщень $u(r,z)$ повинен задовольняти рівностям

$$\int_\Omega u\ d\Omega = 0\ ; \ \int_\Omega r \times u\ d\Omega = 0\ , \tag{9}$$

де r – радіус-вектор довільної точки.

4 Формування структур розв'язку варіаційної задачі. Згідно з методом R-функцій [6] наближений розв'язок задачі (7–8) будемо шукати у вигляді

$$u_r = \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + 2(1-\beta^2)\omega \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_1 - (1-2\beta^2)\omega \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\Phi_1}{r} +$$

$$+\omega\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2-(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\right]T_1\Phi_2\,;$$

$$u_z=\Phi_2-\omega D_1\Phi_2-2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}T_1\Phi_2-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\Phi_1}{r}+$$

$$+\omega\left[(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\right]T_1\Phi_1\,. \qquad (10)$$

Тут:

1. Функція $\omega(r,z)\in C^1(\Omega)$, побудована за допомогою апарату R-функцій, є лівою частиною нормалізованого до першого порядку рівняння межі $\partial\Omega$ області [5,6]

$$\omega(r,z)=0\,,\ (r,z)\in\partial\Omega$$

та має такі властивості:

а) $\omega(r,z)>0\,,\ (r,z)\in\Omega\,;$

б) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}=-1\,,\ (r,z)\in\partial\Omega\,.$

2. D_1, T_1 – диференціальні оператори, що визначаються рівностями

$$D_1 g=\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\,;$$

$$T_1 g=-\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial z}\,.$$

3. Функції $\Phi_i(r,z)$ (i = 1,2) є довільними. При будь-якому їх виборі крайові умови (4) виконуються точно. У чисельній реалізації структур розв'язку (10) функції Φ_i подаються у вигляді розвинення за елементами деякої повної системи функцій (поліномів Чебишева, сплайнів та ін.):

$$\Phi_1(r,z)=\sum_{m=1}^{n_1}C_{1,m}\varphi_m^{(1)}(r,z)\,;$$

$$\Phi_2(r,z)=\sum_{m=1}^{n_2}C_{2,m}\varphi_m^{(2)}(r,z)\,. \qquad (11)$$

Підставивши (11) у формули (10), представимо наближений розв'язок задачі (7–8) у вигляді

$$u_{rn}(r,z)=\sum_{i=1}^{n}C_i\Psi_{ri}(r,z)\,;$$

$$u_{zn}(r,z)=\sum_{i=1}^{n}C_i\Psi_{zi}(r,z)\,, \qquad (12)$$

де $n = n_1 + n_2$; $C_i = \begin{cases} C_{1,i}, & i \le n_1 \\ C_{2,i}, & n_1 < i \le n \end{cases}$; $\Psi_{ri}(r,z)$; $\Psi_{zi}(r,z)$; $(i = \overline{1,n})$ – деякі функції, що визначаються структурами (10).

Мінімізуючи функціонал (7) на множині функцій (12), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left[a_{ij} - \gamma^2 \cdot b_{ij}\right] = 0 \ \ (j = \overline{1,n}), \tag{13}$$

де

$$a_{ij} = \iint_D \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \right)\left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. +2\left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}\Psi_{rj}}{r^2} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z}\frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial r} \right)\left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) \right\} r dr dz;$$

$$b_{ij} = \iint_D (\Psi_{ri}\Psi_{rj} + \Psi_{zi}\Psi_{zj}) r dr dz \ ; \ i, j = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Тут D – проекція області Ω на площину Orz.

Перші n власних значень $\gamma_1^2 < \gamma_2^2 < \ldots < \gamma_n^2$ задачі (5) визначаються рівнянням, що випливає із системи (13):

$$\det(A - \gamma^2 B) = 0,$$

де $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Коефіцієнти C_i апроксимуючих розвинень (12) обчислюються для кожного власного значення γ_k^2 $(k = \overline{1,n})$ як розв'язки системи лінійних рівнянь (13) за умови (8). Вони визначають власні форми коливання тіла.

5 Чисельні результати. Розглянемо задачу про власні радіальні коливання прямого кругового пружного циліндра радіуса R і висоти h, розташованого симетрично відносно площини $z = 0$ (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Розв'язання цієї задачі наведено в [2] та здійснюється за допомогою варіаційного методу Рітца (метод 1).

Отримаємо наближений розв'язок задачі за допомогою методу, запропонованого вище (метод 2).

Циліндр, що розглядається, утворюється перетином нескінченного циліндра радіуса R: $\Omega_1 = \{r = R\}$ з нескінченною смугою ширини h: $\Omega_2 = \{-h/2 \le z \le h/2\}$, тобто $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$. Нормалізовані до першого порядку рівняння меж областей $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_2$ визначаються функціями

$$\omega_1(r,z) = \frac{1}{2R}(R^2 - r^2)\,; \qquad \omega_2(r,z) = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right].$$

Нормалізоване до першого порядку рівняння межі циліндра $\omega(r,z) = 0$, $(r,z) \in \partial\Omega$ задається функцією

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2\,.$$

Тут символом « $\wedge_0$ » позначено операцію R_0-кон'юнкції [5,6]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Для побудови структур наближеного розв'язку (10) в розвиненнях (11) покладаємо

$$\{\varphi_m^{(1)}(r,z)\}_{m=1}^{\infty} = \{r^{2k+1} z^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty}\,;$$

$$\{\varphi_m^{(2)}(r,z)\}_{m=1}^{\infty} = \{z^{2k+1} r^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty}\,.$$

Обрані таким чином системи функцій за рахунок симетрії забезпечують виконання умов (9).

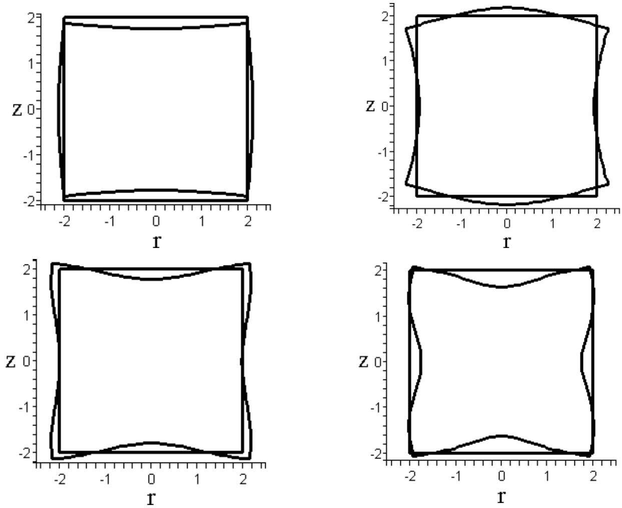
Інтеграли (14) обчислювались наближено за допомогою квадратурних формул Гаусса, порядок яких узгоджувався зі степенями апроксимуючих поліномів. Враховуючи симетрію, обчислення виконувались за 1/4 частиною меридіанного перетину циліндра. З метою оцінки точності результатів розрахунки проводились із різним числом координатних функцій. Для підтвердження вірогідності отриманих результатів перевірялось виконання крайових умов (4).

У таблиці наведено перші чотири власних значення, що знайдені за методами 1 та 2. Представлені результати отримано з числом $n = 6$ та $n = 10$ координатних функцій. Для обчислень покладено $R = 2$, $h = 4$, $\beta^2 = 1/4$. Усі розрахунки виконано в середовищі Maple 9.5.

Розв'язок задачі на власні значення для прямого кругового циліндра

Власні значення	Число координатних функцій			
	$n = 6$		$n = 10$	
	Метод 1	Метод 2	Метод 1	Метод 2
γ_1^2	1,35596	1,36794	1,35584	1,35955
γ_2^2	2,49976	2,55196	2,47290	2,49528
γ_3^2	4,61518	4,56298	4,38968	4,40530
γ_4^2	7,98255	7,64823	6,73395	6,75028

На рисунку представлено власні форми, що відповідають першим чотирьом власним значенням.



Власні форми коливання прямого кругового циліндра

6 Висновки. Розроблено універсальний алгоритм для розрахунку власних радіальних коливань пружних циліндрів довільної бічної форми. Координатні послідовності варіаційної задачі будуються за допомогою лівих частин нормалізованих до першого порядку рівнянь меж областей. Побудова цих лівих частин здійснюється шляхом використання двомісних *R*-операцій. Аналіз наближеного і тестового розв'язків показав, що вже при $n = 6$ координатних функціях перші три власні значення співпадають з точністю до 0,1. Алгоритм реалізовано за допомогою програмного пакету Maple 9.5.

Список літератури: 1. *Гринченко В.Т.*, *Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с. **2.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. **3.** *Nieves F.J., Bayón A., Gascón F.,* 2008, Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinders, J. of Sound and Vibration, 311, 588-596. **4.** *Чирков А.Ю.* Применение смешанных вариационных формулировок МКЭ к решению задач о собственных колебаниях упругих тел // Проблемы прочности. – 2008. – № 2. – С. 121-140. **5.** *Рвачев В.Л., Курпа Л.В.* R-функции в задаче теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1987. – 175 с. **6.** *Рвачев В.Л.*, *Синекоп Н.С.* Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наукова думка, 1990. – 216 с.

Надійшла до редколегії 04.06.2009